2024ko martxoak 8 Kalkulua

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1 eta erdi

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

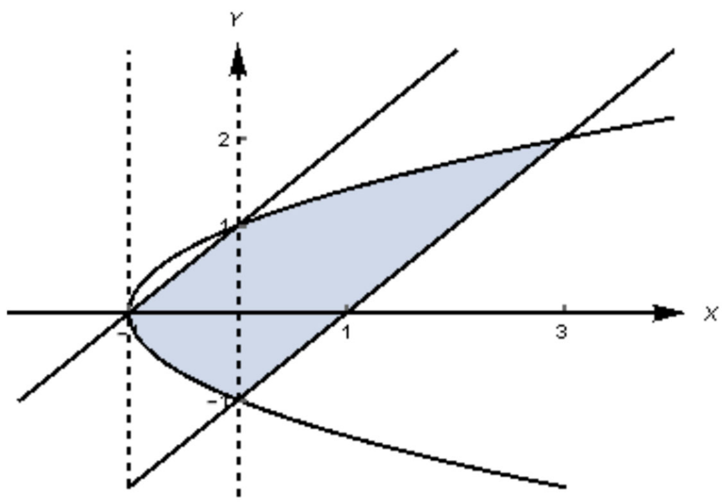
1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\arcsin(x-y)+\frac{\sqrt{x-y^2+1}}{\mathrm{L}\left(x+1\right)}$$

(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, -1\le x-y\le 1,\ x-y^2+1\ge 0,\ \mathrm{L}\left(x+1\right)\ne 0,\ x+1>0\right\}$$

- $-1\le x-y\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad x-1\le y\le x+1$ ($y=x-1$ zuzenaren gainetik eta $y=x+1$ zuzenaren azpitik dagoena, zuzen biak barne).
- $x-y^2+1\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\ge y^2-1$ ((-1,0) puntuan erpina, eta (0,1) eta (0,-1) puntutik igarotzen den parabolaren eskuinaldera dagoena, parabola barne).
- $\mathrm{L}\left(x+1\right)\ne 0 \quad\Leftrightarrow\quad x+1\ne 1 \quad\Leftrightarrow\quad x\ne 0$ (OY ardatza ez da definizio-eremukoa).
- $x+1>0 \quad\Leftrightarrow\quad x>-1$ ($x=-1$ zuzenaren eskuinaldera dagoena).



2.- $f(x,y)=\begin{cases} A+\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) Azter ezazu lehenengo mailako deribatu partzialen existentzia (0,0) puntuan, *A* parametroaren balioen arabera.

b) Azter ezazu diferentziagarritasuna (0,0) puntuan, *A* parametroaren balioen arabera.

c) $A=0$ kasurako, kalkula ezazu deribatu direkzionala (0,0) puntuan, $y=3x-1$ zuzenaren norabidean.

(2.5 puntu)

a) Deribatu partzialak (0,0) puntuan definizioa erabiliz kalkulatu behar ditugu:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{A+\dfrac{0}{\sqrt{h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{A}{h}\begin{cases}=0 & \Leftrightarrow \quad A=0\\ \nexists & \forall A\neq 0\end{cases}$$

Simetriaz, $f'_y(0,0)\begin{cases}=0 & \Leftrightarrow \quad A=0\\ \nexists & \forall A\neq 0\end{cases}$

b) $\forall A\neq 0$, *f* ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

Eta, $A=0$ kasuan, diferentziagarritasunerako B.B.N erabiliko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|hk|}{h^2+k^2}\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^2\cdot|\sin\theta\cdot\cos\theta|}{\rho^2}=\underbrace{\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}|\sin\theta\cdot\cos\theta|}_{\nexists}$$

Beraz, $A=0$ kasuan ere f ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

(*) Polarretan adieraziz: $\begin{cases}h=\rho\cdot\cos\theta\\ k=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$

c) f diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan, $\dfrac{df}{d\vec{u}}$ definizioz kalkulatu behar dugu, hau da, $\forall\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektore unitario, $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda}$.

Kasu honetan, $\vec{u}=(1,3)$ ($y=3x-1$ zuzenaren norabide-bektorea), eta, unitario bihurtuz, $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$. Beraz:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\dfrac{\lambda^2\cdot(h_1\cdot h_2)}{\sqrt{\lambda^2\cdot(h_1^2+h_2^2)}}}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^2\cdot(h_1\cdot h_2)}{\lambda\sqrt{\lambda^2}} = \frac{3}{10}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{|\lambda|}$$

Baina, $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\lambda}{|\lambda|} = \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\lambda}{\lambda} = 1 \\ \displaystyle\lim_{\lambda\to 0^-}\frac{\lambda}{|\lambda|} = \lim_{\lambda\to 0^-}\frac{\lambda}{-\lambda} = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{|\lambda|} \quad \Rightarrow \quad \nexists \left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}$

3.- Metalezko plaka baten puntu bakoitzeko tenperatura funtzio honek ematen du:

$$f(x,y) = e^{2x}\cdot\cos\left(\varphi\left(3y^2\right)\right) + e^{3y}\cdot\cos\left(\varphi(2x)\right)$$

non φ funtzio diferentziagarria den, eta, $\varphi(0)=0$.

(0,0) puntuan bagaude:

a) **zein norabidetan igoko da azkarren tenperatura?**

b) **zein norabidetan jaitsiko da azkarren tenperatura?**

c) **zein norabidetan ez da aldatuko tenperatura?**

(2 puntu)

f funtzio diferentziagarria denez, aldakuntzarik azkarrena gradientearen norabidean ematen da, $\overrightarrow{\nabla f}(0,0) = \left(f'_x(0,0), f'_y(0,0)\right)$, alegia.

$$f'_x(x,y) = 2e^{2x}\cdot\cos\left(\varphi\left(3y^2\right)\right) - 2\varphi'(2x)e^{3y}\cdot\sin\left(\varphi(2x)\right) \quad\Rightarrow\quad f'_x(0,0) = 2$$

$$f'_y(x,y) = -6y\varphi'\left(3y^2\right)e^{2x}\cdot\sin\left(\varphi\left(3y^2\right)\right) + 3e^{3y}\cdot\cos\left(\varphi(2x)\right) \quad\Rightarrow\quad f'_y(0,0) = 3$$

Orduan:

a) f arinen igoko da $\overrightarrow{\nabla f}(0,0) = (2,3)$ bektorearen norabide eta noranzkoan.

b) f arinen jaitsiko da $-\overrightarrow{\nabla f}(0,0) = (-2,-3)$ bektorearen norabide eta noranzkoan

c) f ez da aldatuko gradientearekiko perpendikularra den norabidean, $\vec{u} = (-3,2)$ bektorearen norabidean, hain zuzen ere.

4.- a) Azter ezazu ea $F(x,y,z)=y^2+\frac{2}{x}-\sqrt{z^2-y^2}=0$ ekuazioak $y=y(x,z)$ edo $z=z(x,y)$ funtzio inplizitu diferentziagarria definitzen duen $P(x,y,z)=(2,0,1)$ puntuaren ingurune batean.

b) Aurreko atalean existitzen dela egiaztatu duzun funtzio inpliziturako, aurki ezazu *P* puntuko plano ukitzailearen ekuazioa.

(2 puntu)

a) $F(x,y,z)=y^2+\frac{2}{x}-\sqrt{z^2-y^2}=0$ ekuazioak $P(x,y,z)=(2,0,1)$ puntuan funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duenentz aztertuko dugu:

i. $F(P)=0$

ii. $F'_x=-\frac{2}{x^2}$ $F'_y=2y+\frac{y}{\sqrt{z^2-y^2}}$ $F'_z=\frac{-z}{\sqrt{z^2-y^2}}$ jarraituak dira P puntuaren ingurunean.

iii. $F'_y(P)=0$, baina $F'_z(P)=-1\neq 0$

Beraz, P puntuaren ingurune batean, emandako ekuazioak ez du $y=y(x,z)$ funtzio inplizitua definitzen, eta bai, ordea, definitzen du $z=z(x,y)$ funtzio inplizitu diferentziagarria, non $z(2,0)=1$, eta $F(x,y,z(x,y))=0$.

b) $z=z(x,y)$ funtzioak adierazitako gainazalari dagokion P puntuko plano ukitzailearen ekuazioa hurrengoa da:

$$z-1=z'_x(2,0)\cdot(x-2)+z'_y(2,0)\cdot y$$

$F(x,y,z(x,y))=0$ ekuazioa x-rekiko eta y-rekiko deribatuz:

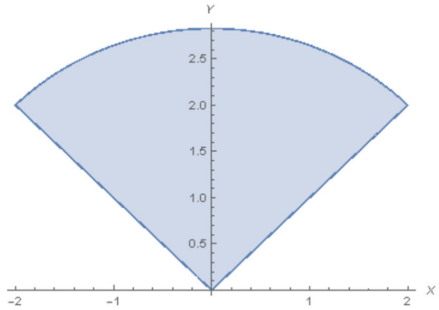
$$\left.\begin{array}{l}F'_x+F'_z\cdot z'_x=0\\ F'_y+F'_z\cdot z'_y=0\end{array}\right\} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}-z'_x(2,0)=0\\ -z'_y(2,0)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}z'_x(2,0)=-\frac{1}{2}\\ z'_y(2,0)=0\end{array}\right.$$

Beraz, plano ukitzailea honako hau da: $z-1=-\frac{1}{2}(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad z=2-\frac{x}{2}$

5.- Aurki itzazu $f(x,y)=x^2+y^2+xy$ funtzioaren mutur absolutuak hurrengo multzoan:

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 8,\ y\ge |x|\right\}$$

(2 puntu)



M multzo itxi eta mugatua da, eta, beraz, Weiertrass-en teoremak ziurtatuko du $f(x,y)=x^2+y^2+xy$ funtzio jarraituak maximo eta minimo absolutuak dituela multzo horretan.

Hasiko gara f-ren puntu kritiko ez-baldintzuak kalkulatzen:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=2x+y=0 \\ f'_y=2y+x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=(0,0)\in M$$

Orain, f-ren puntu kritiko baldintzuak kalkulatuko ditugu, M-ren mugan daudenak, alegia.

M-ren mugan 3 zati bereiziko ditugu:

(1) $x^2+y^2=8$ zatia.

Hau da, $x^2+y^2=8$ baldintza betetzen duten puntu kritikoak. Hemen, Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y)=x^2+y^2+xy+\lambda\left(x^2+y^2-8\right)$$

Funtzio honen puntu kritikoak kalkulatuz:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w'_x=2x+y+2\lambda x=0 \\ w'_y=2y+x+2\lambda y=0 \end{array}\right\} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} -(1+\lambda)=\dfrac{y}{2x}=\dfrac{x}{2y} \Leftrightarrow x^2=y^2 \quad \left((*)\, x=0 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow 0=8\#\right) \\ x^2+y^2=8 \quad\Rightarrow\quad 2x^2=8 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm 2 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x=-2 \quad\Rightarrow\quad y=\pm 2 \\ x=2 \quad\Rightarrow\quad y=\pm 2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Baina, M multzoan $y\ge |x|\ge 0$ beraz, aurreko emaitzetatik, bi puntu kritiko baino ez dira baliagarriak: $B=(-2,2)$ eta $C=(2,2)$

(2) $y=|x|$ zatian. Hemen, bi azpizati ditugu:

$$y=x \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=f(x,x)=3x^2=g(x) \quad\Rightarrow\quad g'(x)=6x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$$

$$y=-x \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=f(x,-x)=x^2=h(x) \quad\Rightarrow\quad h'(x)=2x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$$

Beraz, kasu bietan, berriro, A puntu kritikoa baino ez dugu lortzen.

(3) M-ren erpinek osatzen duten zatia da (bi baldintza batera betetzen dituzten puntu kritikoak lirateke). Kasu honetan, puntu horiek jadanik lortu ditugu (A, B eta C dira).

Orain, f-ren balioak puntu kritiko guztietan kalkulatuko ditugu:

$$f(A)=0<f(B)=4<f(C)=12 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A \text{ minimo absolutua da} \\ C \text{ maximo absolutua da} \end{array}\right.$$